SCIENZA FIRENZE
Ventunesima edizione

VEDERE L'INVISIBILE
Lo sguardo dello scienziato dentro le cose.

Firenze, 18-19 aprile 2024

SECONDO CLASSIFICATO
SEZIONE TESINE BIENNIO

Dalla realtà al modello

Studenti
Di Luca Micol - Prete Gabriele - Radicioni Riccardo - Tavazzi Daniele - Zizoune Reda

Classe 2T

Istituto di Istruzione Superiore
Liceo scientifico A. Cesaris – Casalpusterlengo (LO)

Docente Coordinatore
Giannelli Fabrizio

Molto originale l'idea galileiana di ricercare la struttura matematica invisibile dei fenomeni fisici. Si riproducono sette situazioni reali, per ciascuna si individuano e si misurano due grandezze significative, si elaborano i dati graficamente con stima dell'errore, usando in modo consapevole il foglio elettronico, e si arriva a individuare semplici relazioni matematiche. L'attività, impegnativa ma adeguata alle conoscenze degli studenti, è descritta con essenzialità e rigore anche linguistico.

diesse
FIRENZE E TOSCANA
Didattica e Innovazione Scolastica
Centro per la formazione e l'aggiornamento

DALLA REALTA' AL MODELLO

Sezione biennio

L'attività di laboratorio didattico di solito mira a verificare le leggi studiate teoricamente dagli studenti. Tuttavia, in modo più insolito, può anche avere l'obiettivo di scoprire i modelli che descrivono un fenomeno. Quest'ultimo approccio è particolarmente interessante poiché coinvolge gli studenti in un ruolo attivo di ricerca di fronte al reale.

Il nostro lavoro coinvolge cinque studenti del secondo anno del liceo scientifico OSA e ha avuto come obiettivo principale la "scoperta" delle leggi che regolano alcuni fenomeni fisici. I fenomeni studiati sono stati scelti, per quanto possibile, da situazioni reali e non rappresentano i tipici esempi affrontati in un laboratorio di fisica tradizionale.

L'attività ha compreso l'esecuzione di circa quindici esperimenti, per ciascuno dei quali è stato elaborato un modello matematico che collega le grandezze fisiche coinvolte seguendo una procedura ben definita. In particolare, le leggi sono state dedotte dai grafici, che inizialmente sono stati realizzati su carta millimetrata e successivamente, a scopo di controllo, trasferiti su un foglio elettronico.

Il lavoro è stato condotto nel periodo compreso tra l'inizio di novembre e la fine di febbraio. Nel corso di questo periodo, abbiamo programmato e partecipato a oltre dieci incontri, ciascuno della durata di circa 4 ore, svolti nei sabati mattina. Complessivamente, abbiamo dedicato circa 40 ore di lavoro in presenza a questa attività.

La selezione del tema, concordata con gli studenti, è stata motivata dal riconoscimento che anche nei fenomeni apparentemente visibili esistono aspetti "nascosti". Tali elementi possono essere compresi attraverso l'ausilio della matematica, cioè tramite l'utilizzo di modelli che descrivono in maniera accurata i fenomeni stessi.

Gli studenti si sono distinti per il loro coinvolgimento e la responsabilità dimostrata nel corso dell'esperienza. Hanno mostrato un apprezzamento significativo per l'approccio di lavoro proposto e le metodologie utilizzate, evidenziando un interesse attivo nell'affrontare le sfide proposte.

Il referente del progetto

DALLA REALTA' AL MODELLO

"La filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intender se prima non s'impara a intendere la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto".
Galileo Galilei

Abstract Through this project we wanted to comprehend the methods that allow us to describe natural phenomena through mathematical models. We used the main functions (direct proportionality, quadratic proportionality, …) to describe, as far as possible, the phenomena that can't be found in physics textbooks, by getting ideas from our daily experience.

INTRODUZIONE

Cercando il significato della parola *fisica* in internet abbiamo trovato la seguente definizione:

"Scienza che studia e descrive i fenomeni naturali, riproducendoli, quando possibile, con esperimenti, osservandoli e misurando le grandezze che li determinano, allo scopo di individuare le relazioni tra queste e le leggi che li governano; alle sue basi stanno il metodo sperimentale e osservativo e la formalizzazione di tali leggi tramite il linguaggio matematico".

Da questa definizione si capisce che in ambito fisico la matematica è il linguaggio più appropriato da utilizzare. Questo aspetto, come si evince dalla citazione riportata sopra, era già chiaro a Galileo Galilei.

Con questo lavoro abbiamo voluto mettere in atto le procedure basilari al fine di dedurre i modelli matematici che descrivono alcuni fenomeni fisici.

I fenomeni che abbiamo preso in considerazione sono "insoliti", ossia non si trovano generalmente sui libri di fisica. Nella scelta di tali fenomeni abbiamo cercato, con l'aiuto del nostro professore di fisica, di prendere spunto dalla nostra esperienza quotidiana.

Gli esperimenti che abbiamo eseguito sono una quindicina. Nella tesina riportiamo il resoconto dettagliato di sette esperienze. In particolare, abbiamo riportato un esperimento per ognuna delle relazioni matematiche più utilizzate. Il resto degli esperimenti eseguiti è brevemente descritto in appendice [A].

IL LINGUAGGIO MATEMATICO: RELAZIONI TRA GRANDEZZE FISICHE [1]

Normalmente quando si esegue un esperimento si vuole verificare o "scoprire" un modello fisico.
Un modello fisico è una rappresentazione rigorosa di un fenomeno naturale attraverso relazioni matematiche.

Le relazioni tra grandezze fisiche possono essere di diverso tipo. Un particolare tipo di relazione è la funzione.
Dati due insiemi X e Y, si definisce funzione da X a Y una qualunque relazione che associ a un valore x di X uno ed un solo valore y di Y (in simboli f(x)=y).
Gli insiemi X e Y possono contenere oggetti qualunque tra cui numeri. Noi prenderemo in considerazione insiemi numerici (valori delle grandezze fisiche), in tal caso le funzioni si dicono funzioni numeriche.
La relazione matematica esistente tra due grandezze fisiche è possibile dedurla dal grafico che le rappresenta.
Ora vedremo come sia possibile passare dal grafico sperimentale al modello matematico che meglio descrive la relazione tra le grandezze fisiche rappresentate.

La più semplice relazione esistente tra due grandezze fisiche è la *diretta proporzionalità*. In un grafico tale relazione è rappresentata da una retta passante per l'origine. La relazione matematica che lega due grandezze direttamente proporzionali è la seguente:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x}$$

In sostanza, la grandezza fisica rappresentata sull'asse delle ordinate è uguale ad una costante ***k***, detta *pendenza (o coefficiente angolare),* per la grandezza fisica rappresentata sull'asse dell'ascisse.

Per capire come si procede facciamo un esempio. Immaginiamo di aver fatto una misura di spazio percorso da un oggetto al passare del tempo e realizziamo il grafico (figura 1) dei dati raccolti [2].

Il legame tra spazio e tempo, dell'esempio rappresentato nel grafico, è una diretta proporzionalità. In questo caso la relazione matematica, sulla base di quanto detto sopra, risulta:

$$S = k \cdot t$$

La costante K (pendenza) nel caso dell'esempio, rappresenta il rapporto tra lo spazio e il tempo. La pendenza in generale rappresenta una grandezza fisica la cui unità di misura è data dal rapporto delle unità di misura delle grandezze rappresentate sull'asse y ed x.

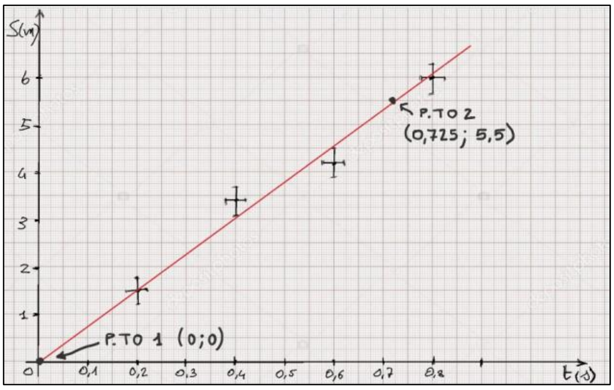

Figura 1 Grafico che rappresenta una diretta proporzionalità

Per la determinazione del valore di k si procede nel seguente modo. Una volta realizzato il grafico si scelgono due punti sulla retta che meglio approssima i dati sperimentali come nella figura 1 (P.to 1 e P.to 2). I due punti si scelgono arbitrariamente e possono coincidere con due coppie di valori riportati in tabella a condizione che li contenga la retta. In generale, è consigliabile scegliere i due punti non molto vicini, verso le due estremità del grafico, e se, come nel caso dell'esempio, la retta passa perfettamente per l'origine conviene scegliere come primo punto l'origine (0;0).
Valutate le coordinate dei due punti si può procedere al calcolo della pendenza:

$$k = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{5{,}5 - 0}{0{,}725 - 0} = 7{,}6$$

La pendenza, in questo caso, ha unità di misura m/s e rappresenta lo spazio percorso (7,6 m) nell'unità di tempo (1 s). In generale, la pendenza, *rappresenta quanto varia la grandezza fisica riportata sull'asse delle ordinate quando la grandezza fisica riportata sull'asse delle ascisse varia di 1.*
In definitiva il modello matematico che meglio descrive il fenomeno, preso in considerazione, è

$$S = 7{,}6 \cdot t$$

Questa formula permette di valutare la posizione S per qualsiasi valore del tempo t e viceversa.
Possiamo concludere mettendo in evidenza quanto segue: *due grandezze si dicono direttamente proporzionali se il rapporto tra valori corrispondenti delle due grandezze è costante*.
La pendenza è una sorta di rapporto medio tra i dati delle due grandezze riportate nel grafico.

La procedura si complica quando le relazioni tra grandezze assumono forme diverse. Per questioni di spazio faremo vedere solo un esempio.
Facendo riferimento al primo esempio immaginiamo di avere dei valori il cui grafico risulti quello riportato in figura 2.
Come si può notare la curva che meglio approssima i dati sperimentali non corrisponde ad una proporzionalità diretta, ma sembrerebbe una parabola. Se così fosse avremmo a che fare con una *proporzionalità quadratica*. Quest'ultima caratteristica però va verificata, non basta la semplice osservazione del grafico. A tal fine si devono modificare opportunamente i dati in modo da "linearizzare" la curva; effettuare quella che in gergo viene detta *rettifica*. Fare la rettifica di un grafico non è banale, ma se la curva sembra una parabola si può provare elevando al quadrato la grandezza riportata sull'asse delle ascisse, nel nostro caso il tempo.

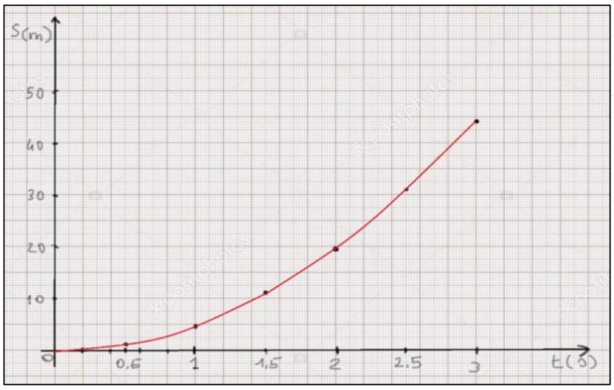

Figura 2 Grafico che rappresenta una proporzionalità quadratica

Fatto questo si riportano in grafico i dati, ovviamente sostituendo le ascisse iniziali con i loro quadrati, e se la nuova curva è una retta uscente dall'origine (diretta proporzionalità) allora la nostra ipotesi è confermata.

In effetti, nell'esempio preso in esame le cose stanno proprio così, come si evince dal grafico di figura 3.

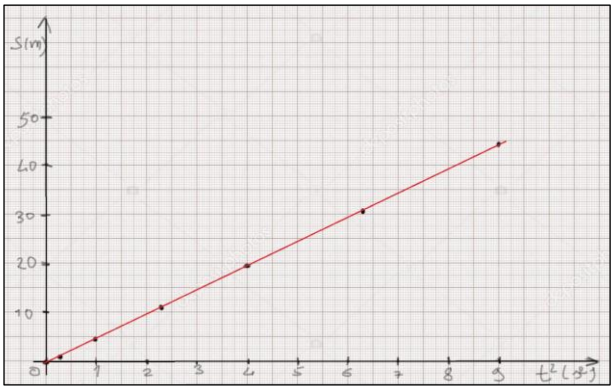

FIGURA 3 Rettifica del grafico di figura 2

Dal grafico si può constatare che lo spazio S è direttamente proporzionale al tempo t elevato al quadrato. Si può concludere che le grandezze spazio e tempo sono legate da una proporzionalità quadratica.
Per determinare il modello matematico si procede come visto in precedenza. Facendo riferimento al grafico sopra (figura 3) si ottiene:

$$S = 4{,}9 \cdot t^2$$

Ovviamente 4,9 m/s^2 è la pendenza del grafico.
Concludiamo dicendo che, in questo tipo di relazione, al raddoppiare della grandezza riportata sull'asse delle ascisse l'altra grandezza quadruplica.

In sintesi, diciamo che per dedurre il modello dal grafico bisogna, una volta graficati i valori, ipotizzare il tipo di legame tra le grandezze e tentare di fare la rettifica sulla base dei modelli matematici noti [3].
Non sempre la rettifica va a buon fine al primo tentativo. Per esempio, nel caso descritto avremmo potuto ottenere ancora una curva parabolica anche graficando S in funzione del tempo quadrato. In tal caso avremmo dovuto fare un ulteriore tentativo, elevando il tempo al cubo. Se in questo modo si fosse ottenuta una diretta proporzionalità allora avremmo potuto concludere che tra spazio e tempo vi è una proporzionalità cubica.
Ovviamente la procedura descritta può essere sostituita dall'utilizzo di un foglio elettronico che permette di individuare velocemente il modello matematico che lega due grandezze fisiche.

Gli esperimenti

1. La traiettoria di un tappo – Diretta proporzionalità

Facendo rotolare un tappo di sughero di una bottiglia di vino appena stappato ci si accorge facilmente che percorre una traiettoria circolare. Questo moto è dovuto al fatto che il tappo ha, approssimativamente, la forma di un tronco di cono. La differenza di raggi tra le basi influenza il moto del tappo facendo percorrere traiettorie il cui raggio è, appunto, dipendente dalla suddetta differenza e dalla lunghezza del tappo.
In questo primo esperimento abbiamo voluto scoprire come varia il raggio della traiettoria al variare della differenza dei raggi delle due basi mantenendo costante la lunghezza del tappo e, mantenendo costanti i raggi, al variare della lunghezza. Per poter avere "tappi" di diversa lunghezza e con basi di diverse dimensioni abbiamo utilizzato delle monetine e dei magneti *Geomag* (figura 4). In questo modo abbiamo potuto realizzare dei tronchi di cono di diverse dimensioni.

Figura 4 Foto dell'apparato sperimentale

Per determinare il diametro della traiettoria abbiamo messo sul bordo di un tavolo un metro ed accostato a quest'ultimo le monetine con i magneti in modo che la moneta più grande coincidesse con lo zero del metro (figura 4). Quindi si dà una piccola spinta alle monete e queste si mettono a rotolare fino a quando non vengono a contatto nuovamente con il metro. A questo punto si rileva la nuova posizione della monetina più grande sul metro e questa distanza rappresenta il diametro della traiettoria. In pratica, in questo modo, il "tappo" percorre una semicirconferenza il cui diametro è dato dalla differenza tra la posizione finale e quella iniziale rilevata sul metro. Per ogni diversa situazione abbiamo effettuato tre misure.
Nella prima serie di misure abbiamo utilizzato una moneta da 1 centesimo come base piccola per tutti i "tappi" e monetine da 2, 5, 20, 50 centesimi e 2 euro per la base grande. Mentre la lunghezza (calamite + monetine) era di circa 3 cm. Le traiettorie ottenute hanno diametri che variano tra circa 16 cm (monetina grande da 2 euro) a circa 43 cm (monetina grande da 2 centesimi). Graficando il diametro della traiettoria in funzione della differenza dei raggi delle monetine abbiamo ottenuto, apparentemente, una proporzionalità inversa. Ma procedendo con la rettifica non siamo riusciti a linearizzare il grafico, ossia la relazione tra le grandezze esaminate non era una proporzionalità inversa e comunque non rientrava in una delle relazioni a noi note. Per questo motivo, i risultati ottenuti non li riportiamo.
Come detto, un altro esperimento è consistito nel tenere fisse le due monetine (1 centesimo e 2 euro) ed allungare il "tappo" aggiungendo di volta in volta dei cilindretti magnetici. I dati ottenuti sono riportati in tabella I e il corrispondente grafico in figura 5.

L (cm)	D (cm)
0	0
3,0±0,1	15,5±0,3
5,5±0,1	29,6±0,4
8,1±0,1	43,6±0,4
10,8±0,1	58,0±0,5
13,2±0,1	74,5±0,6
16,0±0,1	85,0±0,5

Tabella I Variazione del diametro della traiettoria al variare della lunghezza del "tappo".

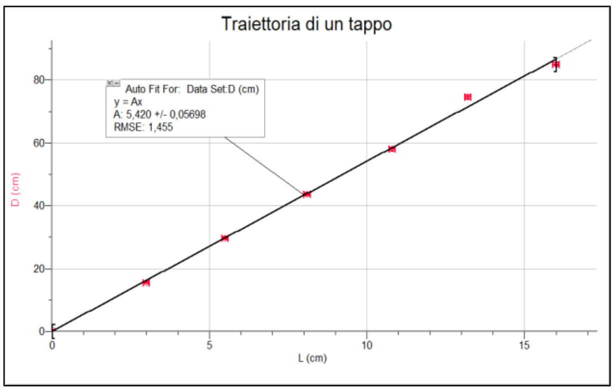

Figura 5 Grafico del diametro in funzione della lunghezza del "tappo".

Come si evince dal grafico, il modello ottenuto è una diretta proporzionalità. In particolare, si ha:

$$D = 5{,}4 \cdot L.$$

La pendenza, in questo caso, non rappresenta una grandezza fisica ma è il rapporto tra due lunghezze.
Facendo alcune semplici considerazioni geometriche si può dimostrare che vale la seguente relazione [B]:

$$\frac{D}{L} = \frac{2 \cdot R_2}{R_2 - R_1} \quad \text{o} \quad D = \frac{2 \cdot R_2}{R_2 - R_1} \cdot L \qquad (1)$$

dove R_2 ed R_1 rappresentano rispettivamente i raggi della monetina grande e della piccola. Avendo usato nel nostro caso la moneta da 2 euro e quella da 1 centesimo si hanno rispettivamente i seguenti diametri (dato preso in internet) 25,75 mm e 16,25 mm. Utilizzando opportunamente questi dati il rapporto $\frac{2 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$ corrisponde esattamente alla pendenza del nostro grafico.
La formula (1) ci ha fatto comprendere come mai non siamo riusciti a linearizzare il primo grafico. Infatti, quando a variare è R_2, la relazione tra D ed (R_2-R_1), comparendo R_2 anche al numeratore dell'espressione (1), non è una semplice proporzionalità inversa.

2. Il suono di un bicchiere – Correlazione lineare

Quando si fa scorrere il dito bagnato sul bordo di un bicchiere quest'ultimo emette un suono la cui frequenza, per un dato bicchiere, varia al variare della quantità di liquido presente nel bicchiere stesso. In questo esperimento abbiamo voluto scoprire come varia la frequenza fondamentale del suono emesso dal bicchiere al variare del livello dell'acqua contenuta all'interno, in particolare, al variare dell'altezza della parte vuota del bicchiere.

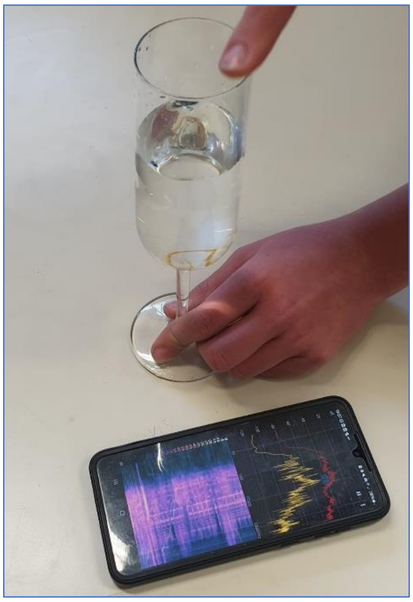

Figura 6 Apparato sperimentale per la misura del suono emesso da un bicchiere

Per eseguire l'esperimento è necessario avere un *flute* di forma cilindrica, uno smartphone con una applicazione per la misura della frequenza sonora (noi abbiamo usato *Spectroid*) ed un righello.
La misura, una volta acquisita la necessaria praticità per riuscire a far emettere un suono "pulito", consiste nel rilevare la frequenza fondamentale del suono e misurare la corrispondente altezza della parte vuota del bicchiere. Le misure da noi effettuate sono riportate in tabella II. Gli errori della frequenza sono ottenuti misurando contemporaneamente questa grandezza con tre smartphone differenti e determinando la semidispersione massima.

f(Hz)	***h(cm)***
459±12	1,0±0,1
525±10	2,0±0,1
603±15	3,0±0,1
667±8	4,0±0,1
745±10	5,0±0,1
830±17	6,0±0,1
890±14	7,0±0,1
936±15	8,0±0,1
960±15	9,0±0,1
970±10	10,0±0,1

Tabella II Frequenza del suono del bicchiere

In figura 7 è riportato il grafico dei valori della tabella II.

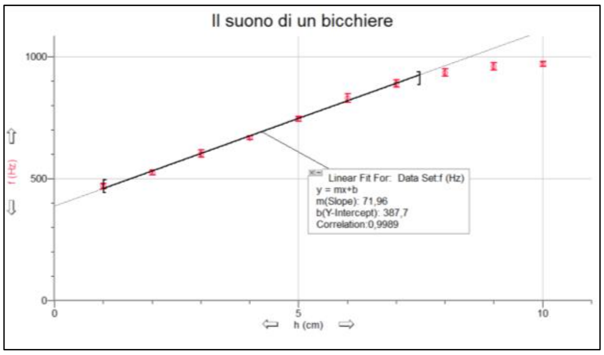

Figura 7 Frequenza del suono emesso dal bicchiere al variare dell'altezza della parte vuota

Come si può notare dal grafico per *h* fino a circa 7 cm il modello che replica i dati è una correlazione lineare. Per altezze superiori l'andamento sembra cambiare. In effetti, questa è una caratteristica che abbiamo riscontrato con diversi bicchieri e sembra essere legata al fatto che da un certo punto in poi, verso la base, il vetro si incurva e aumenta il suo spessore. Quest'ultimo aspetto potrebbe essere la causa del cambiamento che si nota per valori di h più grandi. Per altezze piccole il suono sembra seguire sempre lo stesso andamento, ma risulta sempre più difficile ottenere un suono pulito e l'intensità tende a ridursi con conseguente difficoltà della rilevazione della frequenza con lo smartphone.

3. L'IRRIGATORE GOCCIOLANTE - PROPORZIONALITÀ CUBICA

In rete si trovano diversi modi originali per irrigare le piante durante le vacanze. Uno di questi prevede l'utilizzo di un contenitore d'acqua e un filo di lana. Si inserisce il filo di lana per metà nel contenitore e l'altra metà viene posizionata all'esterno in modo che l'estremità terminale sia sopra il terreno della pianta. Dopo un po', iniziano a cadere gocce d'acqua dalla parte terminale del filo, che vanno ad innaffiare la pianta.
Noi abbiamo simulato questo fenomeno utilizzando un cilindro di laboratorio di diametro interno 2,5 cm (figura 8). In questo modo si riducono i tempi di attesa per lo svuotamento del contenitore. Abbiamo fatto diverse misure verificando che la velocità di efflusso aumenta all'aumentare dello spessore del filo o al numero di fili che si inseriscono nel contenitore; il gocciolamento continua fino a quando il livello dell'acqua non raggiunge il livello dell'estremità della parte di filo posto all'esterno; la velocità di efflusso dell'acqua diminuisce man mano che il livello della stessa si abbassa nel contenitore. In particolare, riportiamo quest'ultima misura, ossia come varia la quantità di acqua che fuoriesce dal contenitore al variare del tempo. Nelle prime due colonne della tabella III sono riportati i dati di una misura effettuata con quattro fili di lana (scelta fatta per velocizzare ulteriormente l'abbassamento del livello dell'acqua). Il grafico corrispondente è in figura 9 ed è riportato il tempo in funzione del volume d'acqua. La scelta insolita di mettere il tempo sull'asse delle ordinate, anziché sull'asse delle ascisse, è dovuta al fatto che per noi risultava di più facile lettura.
Questo è un esempio di grafico che potrebbe ingannare, infatti, in prima battuta potrebbe sembrare una proporzionalità quadratica, ma tentando la rettifica (t; V^2) non si ottiene una diretta proporzionalità. Invece, graficando t in funzione di V^3 si ha una buona linearizzazione come si può vedere nel grafico di fig. 10.

Figura 8 Apparato sperimentale dell'irrigatore

t (s)	V (cm^3)	V^3 (cm^9)
90	8,3±0,5	(0,06±0,01)10^4
213	11,8±0,5	(0,16±0,02)10^4
333	15,2±0,6	(0,35±0,04)10^4
438	17,7±0,6	(0,55±0,05)10^4
612	20,6±0,6	(0,88±0,07)10^4
1089	27,0±0,6	(1,96±0,13)10^4
2166	36,3±0,6	(4,79±0,25)10^4
3429	43,2±0,7	(8.08±0,37)10^4
4410	47,6±0,7	(10,78±0,46)10^4
4866	49,1±0,7	(11,8±0,50)10^4
7209	56,4±0,7	(17,96±0,68)10^4
9021	59,9±0,7	(21,45±0,78)10^4

TABELLA III Dati relativi all'irrigatore

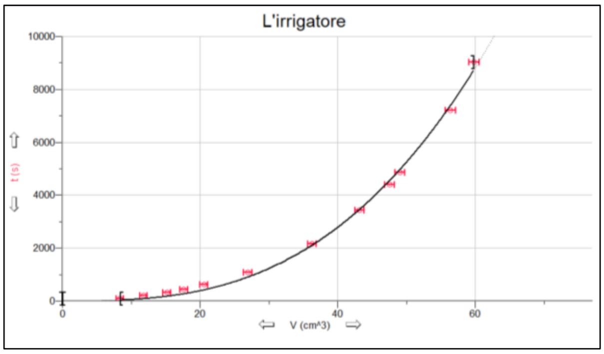

FIGURA 9 Grafico che lega il tempo di svuotamento in funzione della quantità di acqua fuoriuscita

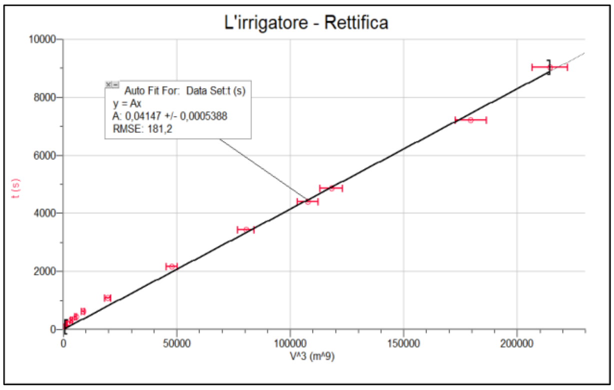

Figura 10 Rettifica del grafico di figura 9

Questo fenomeno è praticamente identico all'*effetto sifone*, anche se in questo caso non è necessario "innescare" il flusso, ma il liquido risale lungo il filo per capillarità.
Dopo aver dedotto quanto sopra e dopo un confronto con il nostro professore abbiamo voluto replicare l'esperimento con un tubicino, sfruttando l'effetto sifone. La misura è stata molto più veloce e con nostra sorpresa abbiamo notato che il modello matematico che descriveva il fenomeno non risultava più una proporzionalità cubica. Il nostro professore ci ha

spiegato che questo tipo di fenomeni vengono descritti da un modello matematico che noi non avevamo ancora incontrato ma che descriveremo nell'ultimo esperimento di questo lavoro. Tuttavia, per le misure da noi effettuate la proporzionalità cubica risulta essere un modello abbastanza accurato per descrivere il fenomeno, almeno fino a quando il liquido non si avvicina al fondo del contenitore.

4. Il flauto di Pan – Inversa proporzionalità

Il flauto di Pan è uno strumento musicale costituito da più canne di diversa lunghezza e chiuse ad una estremità (figura 11). Soffiando opportunamente sulla parte aperta emette un suono che dipende dalla profondità della canna. In questo esperimento abbiamo voluto verificare come varia la frequenza del suono emesso dalle singole canne al variare della profondità. Per rilevare le frequenze abbiamo usato lo stesso sistema descritto nell'esperimento 2.

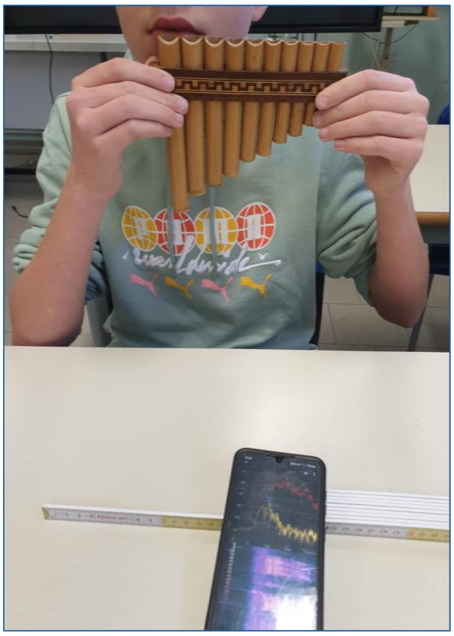

Figura 11 Flauto di pan

L (m)	1/L (m^{-1})	f (Hz)
0,163±0,001	6,13±0,04	525±2
0,140±0,001	7,14±0,05	602±5
0,133±0,001	7,52±0,06	631±1
0,120±0,001	8,33±0,07	697±3
0,106±0,001	9,43±0,09	775±3
0,095±0,001	10,53±0,11	850±4
0,088±0,001	11,36±0,13	940±5
0,078±0,001	12,82±0,16	1041±4
0,066±0,001	15,15±0,23	1185±5
0,060±0,001	16,67±0,28	1320±6

Tabella IV Dati relativi al suono emesso dal flauto di pan

Le misure ottenute sono riportate in tabella IV e in figura 12 è riportato il grafico della frequenza in funzione della lunghezza delle canne.

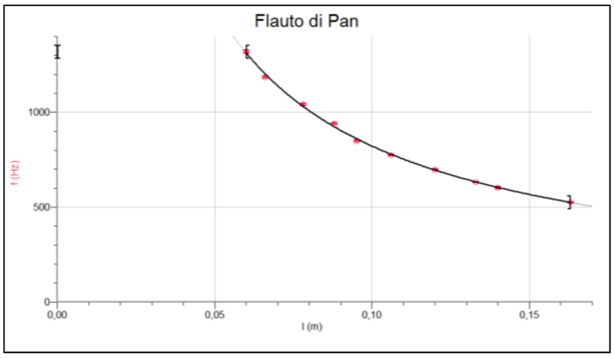

Figura 12 Frequenza in funzione della lunghezza delle canne del flauto.

Il grafico sopra riportato sembrerebbe una proporzionalità inversa. In effetti, per linearizzare il grafico abbiamo dovuto mettere in relazione la frequenza con il reciproco della lunghezza delle canne. In figura 13 è riportata la rettifica.

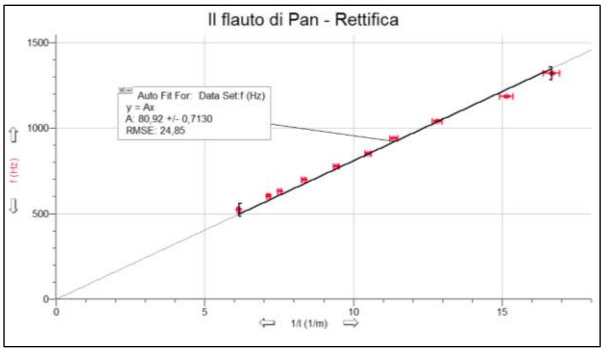

Figura 13 Rettifica del grafico di figura 12

L'equazione ottenuta è $f = \frac{81}{l}$.

Le canne del flauto oltre alla lunghezza hanno diametri differenti. Per verificare se i diametri diversi influenzassero la frequenza abbiamo replicato l'esperimento con delle cannucce ed abbiamo ottenuto praticamente lo stesso andamento con una pendenza molto simile. Quindi possiamo concludere che la larghezza della canna non influenza la frequenza del suono emesso.

Da una ricerca in internet abbiamo scoperto che la legge da noi trovata è in accordo con la teoria e che la costante di proporzionalità risulta pari alla velocità del suono in aria (340 m/s) fratto 4, cioè, circa 85 Hz·m.

5. Il suono dei coperchi – Inversa proporzionalità quadratica

Quando si depongono le stoviglie può capitare di urtarle contro un mobile e, in certi casi, per esempio con alcuni coperchi metallici, si possono udire dei suoni "puliti" e prolungati. Con questo esperimento vogliamo scoprire come varia il suono di un coperchio, quando

viene percosso, al variare del diametro, utilizzando un set di una stessa batteria di pentole.
L'esecuzione dell'esperimento è molto semplice, si tratta di percuotere i coperchi e rilevare, come nell'esperimento precedente, la frequenza fondamentale del suono emesso.

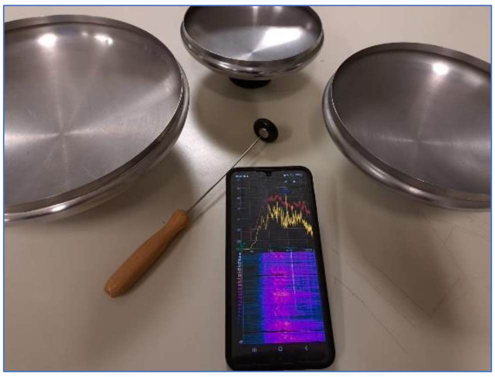

FIGURA 14 Coperchi di una stessa batteria di pentole

Le misure ottenute sono riportate in tabella V e il grafico della frequenza al variare del diametro in figura 15.

D (m)	$1/D^2$ (m^{-2})	f (Hz)
0,160±0,001	39,1±0,5	881±5
0,200±0,001	25,0±0,3	601±4
0,240±0,001	17,4±0,1	420±4
0,280±0,001	12,8±0,1	293±3

TABELLA V Frequenza al variare del diametro

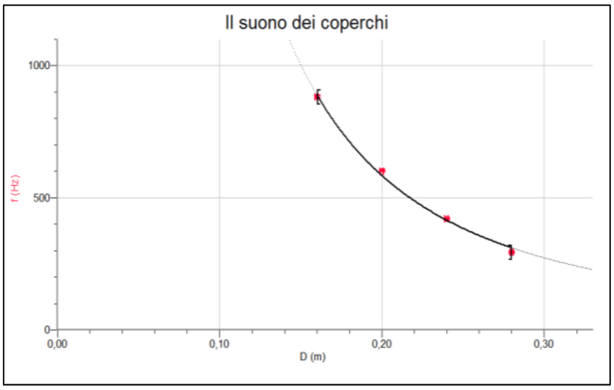

FIGURA 15 Andamento della frequenza al variare del diametro

Per rettificare il grafico bisogna mettere sull'asse delle ascisse il reciproco del quadrato del diametro. In figura 16 è riportato il grafico rettificato.
Per curiosità abbiamo cercato qualcosa di simile in internet ed abbiamo trovato il modello che descrive il suono emesso dai piatti di una batteria e come nel nostro caso vi era una dipendenza da $1/D^2$.

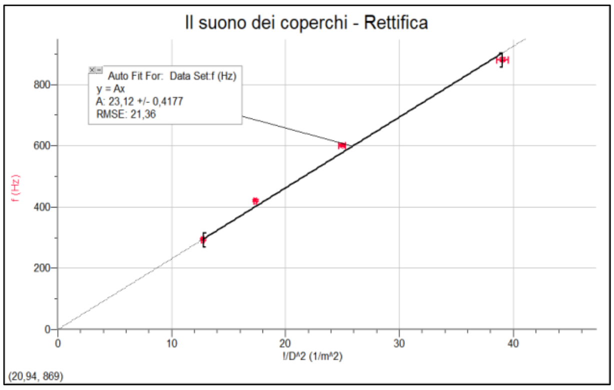

Figura 16 Rettifica del grafico di figura 15

6. GLI OCCHIALI DELLA NONNA – 1 ° CASO PARTICOLARE

È noto che con l'avanzare dell'età le persone hanno bisogno dei cosiddetti "occhiali da lettura", ossia di lenti che permettano di vedere bene da vicino. Puntando una torcia verso le lenti di un paio di occhiali di questo tipo si può ottenere un'immagine nitida, dei led della lampada, su uno schermo posto ad una certa distanza. Quest'ultima distanza dipende dalla posizione della torcia rispetto alle lenti.

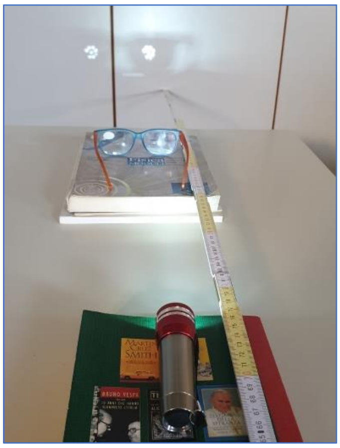

FIGURA 17 Apparato sperimentale per la verifica del comportamento degli occhiali da lettura.

In questo esperimento abbiamo cercato la relazione esistente tra le due distanze: luce-lente; lente-schermo. L'esecuzione è semplice, si pone una torcia sopra qualche libro su un tavolo posto nelle vicinanze di un muro che funge da schermo. Tra la torcia e il muro vengono posizionati gli occhiali, anch'essi sollevati in modo che la luce della torcia attraversi le lenti prima di raggiungere lo schermo. Abbiamo fatto diverse misure variando opportunamente le distanze luce-lente (x) e lente-schermo (y) in modo da ottenere immagini nitide. I dati ottenuti sono riportati in tabella V e nel grafico di figura 18. Abbiamo scelto di associare un errore assoluto di 1 cm alle due distanze per tener conto, anche se in modo grossolano, del fatto che la lente ha un certo spessore, che i led sono all'interno della torcia e l'immagine risulta nitida anche spostando di qualche millimetro la torcia. Come si vede dal grafico tra le due distanze sembra esserci una inversa proporzionalità, ma i vari tentativi effettuati non hanno portato ad una linearizzazione del grafico.

x (m)	y (m)	1/x (m^{-1})	1/y (m^{-1})
1,25±0,01	0,36±0,01	0,80±0,01	2,79±0,08
1,04±0,01	0,38±0,01	0,96±0,01	2,63±0,07
0,75±0,01	0,44±0,01	1,33±0,02	2,27±0,05
0,67±0,01	0,47±0,01	1,49±0,02	2,13±0,05
0,58±0,01	0,53±0,01	1,72±0,03	1,89±0,04
0,53±0,01	0,57±0,01	1,89±0,04	1,75±0,03
0,48±0,01	0,64±0,01	2,08±0,04	1,56±0,02
0,45±0,01	0,72±0,01	2,22±0,05	1,39±0,02
0,42±0,01	0,79±0,01	2,38±0,06	1,27±0,02
0,36±0,01	1,06±0,01	2,78±0,08	0,94±0,01

TABELLA V Distanze luce- lente, lente-schermo.

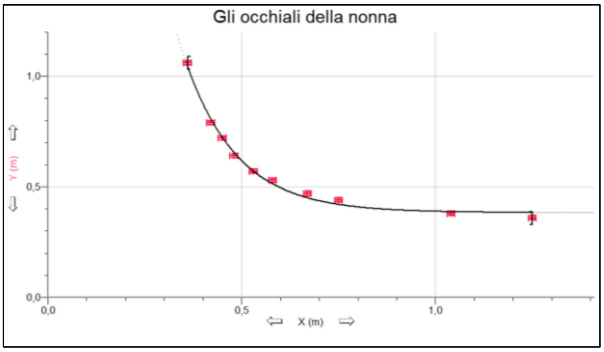

FIGURA 18 Relazione tra la distanza y e la distanza x

Solo dopo un confronto con il nostro professore, grazie ad un suo suggerimento, siamo riusciti ad ottenere la rettifica. A tal fine abbiam dovuto graficare i reciproci delle due distanze. In figura 19 è riportato il grafico ottenuto.

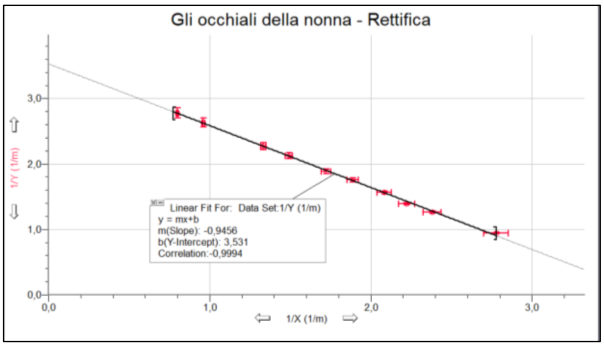

FIGURA 19 Grafico dei reciproci delle distanze

Come si evince da quest'ultimo grafico il legame tra i reciproci delle due distanze è una correlazione lineare a pendenza negativa e con intercetta con l'asse delle ordinate pari a circa 3,5. Questo numero non è casuale, ma è riportato su un adesivo posto sulle lenti degli occhiali che abbiamo utilizzato. Abbiamo scoperto che riguarda una caratteristica degli occhiali. Quella che volgarmente viene detta gradazione.

7. IL RAFFREDDAMENTO DEL TE – 2° CASO PARTICOLARE

Quando ci si prepara un tè bisogna aspettare qualche minuto perché si raffreddi ad una temperatura di circa 50 °C per poterlo bere. In questo esperimento abbiamo simulato la preparazione del te per verificare come varia la temperatura al passare del tempo. Abbiamo portato all'ebollizione circa 250 g di acqua, l'abbiamo versata in un becher e inserito la sonda termometrica precedentemente vincolata ad un supporto di laboratorio come si può vedere in figura 20.

Figura 20 Apparato sperimentale per il rilevamento della temperatura di un liquido che si raffredda.

Dopo qualche minuto, raggiunta una temperatura di 93 °C, abbiamo avviato il cronometro e registrato la temperatura al variare del tempo, dapprima per intervalli di qualche minuto e poi via via per intervalli più grandi. I risultati ottenuti sono riportati in tabella VII e in figura 21 si ha il relativo grafico.

t (min)	T (°C)
0	93,0
2	88,6
5	82,9
10	75,3
20	64,4
40	53,0
60	45,3
90	37,8
120	32,8
150	29,2
180	26,8
240	24,0
315	22,3

TABELLA VII Temperatura al variare del tempo

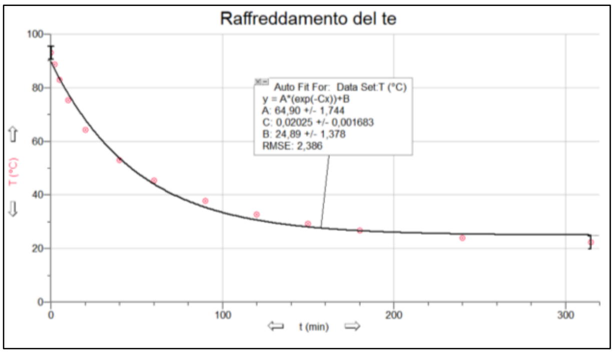

Figura 21 Andamento della temperatura al passare del tempo.

Ad una prima occhiata potrebbe sembrare una proporzionalità inversa, ma siccome la curva interseca l'asse delle y non può esserlo. Dopo un confronto con il nostro professore abbiamo capito che non rientrava in una delle relazioni matematiche a noi già note. Dopo una breve ricerca, abbiamo scoperto che il modello matematico prevede una potenza con una base costante, nota come numero di Nepero. Questo è evidente anche dal fit eseguito utilizzando il foglio elettronico:

$$T = A \cdot e^{-C \cdot t} + B \qquad (2)$$

Inoltre, abbiamo scoperto che il parametro A dovrebbe rappresentare la differenza tra la temperatura iniziale e quella finale del liquido, mentre il parametro B dovrebbe indicare la temperatura finale del liquido, che dovrebbe coincidere con la temperatura ambiente in cui si trova. Infatti, se t=0 s la potenza è 1 ed in tal caso il modello (2) restituisce la temperatura iniziale. Mentre, per t molto grande $e^{-C \cdot t}$diventa quasi zero e la (2) dà il valore finale della temperatura. Nel nostro caso dovremmo avere A=71°C e B=22 °C. Tuttavia, i valori ottenuti con il foglio elettronico presentano delle lievi discrepanze rispetto a questi valori.
Un'ulteriore osservazione riguarda il comportamento dell'esponente della funzione esponenziale in relazione al tempo. Man mano che il tempo aumenta abbiamo visto che il termine $e^{-C \cdot t}$ diventa sempre più piccolo. Questo andamento è influenzato significativamente dal parametro C: valori più elevati di C indicano un raffreddamento più rapido. Questo suggerisce che il parametro C dipende dalle condizioni sperimentali in cui avviene il raffreddamento. Per esempio, se il liquido è all'interno di un thermos il parametro C è piccolo, mentre se agitiamo il liquido con un cucchiaino, ci aspettiamo che il parametro C aumenti, poiché in tal caso il raffreddamento sarà più veloce.

Conclusioni

Grazie a questo lavoro, abbiamo consolidato una procedura che facilita la scoperta del modello matematico per descrivere un fenomeno. Inoltre, abbiamo acquisito una comprensione più approfondita dell'importanza della matematica nel contesto scientifico. Descrivere un fenomeno attraverso un modello matematico ci consente di andare oltre l'osservazione diretta, permettendoci di percepire aspetti altrimenti invisibili.
Gli scienziati utilizzano la matematica per delineare con precisione il comportamento dei fenomeni naturali, consentendo loro talvolta di 'vedere l'invisibile' e ottenere una comprensione più profonda dei fenomeni stessi. Per questo motivo, abbiamo ritenuto che il tema di ScienzAfirenze di quest'anno fosse ben rappresentato dalla scelta di questo lavoro.
Inoltre, ci ha sorpreso scoprire che dietro ogni fenomeno, anche se apparentemente distante dalla fisica, si cela una regolarità che può essere espressa tramite una formula semplice o complessa.

Note

[1] Questa sezione è una sintesi della dispensa sull'argomento fornita dal nostro professore di fisica agli studenti del primo anno del liceo scientifico.

[2] Tutti i grafici riportati in questo lavoro li abbiamo realizzati su carta, secondo la procedura sopra descritta. Per precisione ed estetica, in questo documento, relativamente agli esperimenti, abbiamo riportato i grafici effettuati per controllo con l'applicazione *LoggerPro*.

[3] Per poter eseguire la procedura descritta bisogna conoscere almeno alcune funzioni elementari. Noi abbiamo studiato, oltre alla diretta proporzionalità e alla correlazione lineare, la proporzionalità quadratica e cubica, l'inversa proporzionalità lineare e quadratica ed infine la proporzionalità esponenziale. Per effettuare la rettifica nel caso di una inversa proporzionalità si deve graficare la grandezza y in funzione del reciproco di x, se lineare, o del reciproco di x al quadrato se quadratica. Nel caso della funzione esponenziale la questione si complica, in generale diciamo che si deve utilizzare il logaritmo della grandezza rappresentata sull'asse delle x. Tuttavia, quest'ultima procedura non l'abbiamo utilizzata, ma abbiamo dedotto il modello matematico con un foglio elettronico.

Appendice

[A] Di seguito una breve descrizione degli esperimenti eseguiti ma non descritti nella tesina:

La lattina – Una lattina per due terzi piena di maizena ed acqua (liquido non newtoniano) o glicerina rotola su un piano inclinato in modo da percorrere spazi uguali in tempi uguali. Tra lo spazio percorso e il tempo vi è una relazione di proporzionalità diretta.

L'ombra – In questo caso abbiamo posizionato una torcia, a diverse distanze, sopra un cartoncino di forma quadrata e raccolto l'ombra del cartoncino sul tavolo. Tra le dimensioni dell'ombra e la distanza della torcia dal cartoncino vi è una "proporzionalità inversa" piuttosto complessa che assomiglia a quella ottenuta nel primo esperimento con i tappi.

La torcia – Con uno smartphone è possibile misurare l'intensità luminosa della luce emessa da una torcia. Questa grandezza è inversamente proporzionale alla distanza al quadrato.

La clessidra – Abbiamo riempito una bottiglia con della sabbia per clessidre e forato diversi tappi metallici con fori di diverso diametro. Il tempo di svuotamento della bottiglia sembra essere inversamente proporzionale alla superficie del foro.

Il metronomo – Il metronomo oscilla con tempi diversi in funzione della posizione di un piccolo peso. In questo esperimento abbiamo determinato che tra tempo di oscillazione e distanza del peso dall'asse di oscillazione vi è una correlazione quadratica. Dal grafico ottenuto si deduce un tempo di oscillazione diverso da zero quando la distanza del peso dall'asse di oscillazione è zero.

Il cancello – La forza necessaria per aprire un cancello è tanta più grande quanto più piccola è la distanza dalle cerniere. Attraverso un semplice esperimento abbiamo scoperto che tra le due grandezze vi è una proporzionalità inversa.

Il liquido non newtoniano – Mescolando due opportune quantità di maizena ed acqua si ottiene un liquido non newtoniano. Liquido che presenta una viscosità variabile a seconda dello sforzo che si fa nel tentativo di penetrarlo. Noi abbiamo cercato una relazione tra la pressione esercitata con una sonda (cilindro metallico) e il tempo per penetrare il liquido per una certa altezza. In questo caso non abbiamo trovato variazioni sostanziali per le diverse pressioni. Questo è l'unico esperimento per cui non abbiamo trovato un modello matematico che lo descrivesse.

[B] Giustificazione della formula (1).

La sezione del nostro "tappo" può essere rappresentata come in figura. Le due linee quasi verticali rappresentano le due monete, la linea orizzontale la base d'appoggio. La linea che unisce i due centri delle monete (O_1 ed O_2) se prolungata interseca la linea orizzontale nel punto C. Questo rappresenta il centro della traiettoria circolare del tappo.

I triangoli H_1O_1C e H_2O_2C sono simili, quindi vale la seguente relazione:

$$\frac{H_1C}{H_1O_1} = \frac{H_2C}{H_2O_2}$$

Inoltre, $H_2C = \frac{D}{2}$ dove D è il diametro della traiettoria;

H_1C si può approssimare a $\frac{D}{2} - L$ dove L è l'altezza del "tappo". H_2O_2 e H_1O_1 sono i raggi R_2 ed R_1 delle monetine. Quindi si ha:

$\frac{\frac{D}{2}-L}{R_1} = \frac{\frac{D}{2}}{R_2}$ equivalente a $D = \frac{2 \cdot R_2}{R_2 - R_1} \cdot L$.